Lineare Algebra 1 WS13/14

44) g Gerade in $\mathbb{R}^3$; E Ebene in $\mathbb{R}^3$

Für die Definition von Parameterform & impliziter Form siehe Definition 109 auf Seite 65.

Implizite Form:

•) g Gerade in $\mathbb{R}^3$ $\dim(g) = 1 \Rightarrow rg(A) = 2$ da $n = 3$

Es werden 2 Gleichungen benötigt um g zu beschreiben.

$g: L(A, b)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $b = \mathbb{R}^{2\times 1}$

wobei gilt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ gesucht alle $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ so dass $A \cdot x = b$

•) E Ebene in $\mathbb{R}^3$ $\dim(E) = 2 \Rightarrow rg(C) = 1$ da $n = 3$

Es wird eine Gleichung in $\mathbb{R}^3$ benötigt um E zu beschreiben

$E: L(C, d)$ mit $C \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $d \in \mathbb{R}$

wobei gilt $C = (c_{11}\ c_{12}\ c_{13})$; "$d = d_{11}$"

$\Rightarrow$ gesucht sind alle $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ so dass $C \cdot x = d$

Parameterform:

•) $g = \{p + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; $p \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Aufpunkt Basis des Unterraums

•) $E = \{q + \beta w_1 + \gamma w_2 \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$; $q \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

Aufpunkt Basis des Unterraums

Berechne $g \cap E$, wenn g bzw E in verschiedenen Formen gegeben sind.

a) g und E in impliziter Form:

$g = L(A, b)$; $E = L(c, d)$

$g \cap E$: setze $F = \begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $h = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$

$\Rightarrow g \cap E = L(F, h)$ wobei gilt

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} ; \quad h = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ d \end{pmatrix}$$

b) g und E in Parameterform:

$g = \{p + \underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\alpha} v\}$; $E = \{q + \beta w_1 + \gamma w_2 \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$g \cap E$: $p + \alpha v = q + \beta w_1 + \gamma w_2 \Leftrightarrow$

$p - q = -\alpha v + \beta w_1 + \gamma w_2 = (v \; w_1 \; w_2) \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in L(\underbrace{(v \; w_1 \; w_2)}, p - q)$

$\hat{=}$ einer Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ $\begin{pmatrix} v_1 & w_{11} & w_{21} \\ v_2 & w_{12} & w_{22} \\ v_3 & w_{13} & w_{23} \end{pmatrix} = \tilde{A}$

$\Rightarrow$ gesucht $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ so dass $\tilde{A} \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = p - q$

c) g in Parameterform und E in impliziter Form

$g = \{p + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$; $E = L(c, d)$, $c \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $d \in \mathbb{R}$

$g \cap E$: $c(p + \alpha v) = d \Leftrightarrow cp + \alpha c v = d \Leftrightarrow \underbrace{(cv)}_{\in \mathbb{R}}\alpha = d - \underbrace{cp}_{\in \mathbb{R}}$

$\alpha \in L(cv, d - cp)$

d) g in impliziter Form und E in Parameterform

$g = L(A, b)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $b \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

$E = \{q + \beta w_1 + \gamma w_2 \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$g \cap E$: $A(q + \beta w_1 + \gamma w_2) = b \Leftrightarrow Aq + \underbrace{(A w_1)}_{= \tilde{w}_1}\beta + \underbrace{(A w_2)}_{= \tilde{w}_2}\gamma = b$

$\Leftrightarrow (\tilde{w}_1 \; \tilde{w}_2) \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = b - Aq$

$\Rightarrow$ gesucht $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ aus $L((\tilde{w}_1 \; w_2), b - Aq)$