PS Analysis 4 – Blatt 2 (06.04.2016)

1. Welche der folgenden Mengen sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$?

$$S_1 = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\}, \qquad S_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\}, \qquad S_3 = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

   Die Verwendung des Satzes von Heine-Borel ist nicht erlauben. Überprüfen Sie ob die entsprechenden Mengen kompakt sind, indem Sie die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung für jede offene Überdeckung beweisen oder wiederlegen.

2. Wir betrachten $\left(\mathcal{C}^0, \|\cdot\|\right)$ mit

$$\mathcal{C}^0 = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,;\, f \text{ stetig}\}\,, \qquad \|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

   Zeigen Sie, dass $B = \left\{f \in \mathcal{C}^0\,;\, \|f\| \leq 1\right\}$ abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt ist. Hinweis: Verwenden und beweisen Sie, dass $\left(\mathcal{C}^0, \|\cdot\|\right)$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann folgt, dass jede Folge die in einer kompakten Menge liegt eine konvergente Teilfolge besitzt.

3. Beweisen Sie Satz 1.46 aus dem Skriptum.

4. Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und A kompakt. Zeigen Sie, dass f beschränkt ist. Das heißt, dass

$$\exists C > 0 \forall x \in A\colon |f(x)| < C.$$

   Gilt diese Aussage auch wenn wir anstatt A kompakt nur A beschränkt fordern?

5. Formulieren Sie das Riemann Integral auf einem Intervall mithilfe von Netzen. Geben Sie dazu ein geeignetes Tupel $(I, \geq)$ an und überprüfen Sie, dass dieses die in Definition 1.48 geforderten Bedingungen erfüllt. Zeigen Sie dann, dass eine Funktion genau dann Riemann-integrierbar ist wenn die Netzte der Ober- und Untersummen gegen denselben Wert konvergieren.