PS Analysis 4 – Blatt 4 (20.04.2016)

1. Überprüfen Sie ob die Funktionen die durch folgende Abbildungsvorschriften gegeben sind

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \sin x, \qquad i(x) = \frac{1}{1+\sqrt{|x|}}$$

   in einem (oder mehreren) der Räume $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$,$\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $H^\infty(\mathbb{D})$ liegen.

2. Zeigen Sie, dass c_0 abgeschlossen in $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ ist.

3. Wir betrachten den Raum aller Funktionen mit beschränkter Variation

$$V(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n_P - 1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < \infty$$

   wobei $\mathcal{P} = \{P = \{x_0, \dots, x_{n_P}\} : P \text{ ist eine Zerlegung von } [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass dieser Raum ein normierter Vektorraum ist. Geben Sie eine unstetige Funktion an die in diesem Raum liegt.
   Anmerkung: Der betrachtete normierte Vektorraum ist sogar ein Banachraum. Das können wir aber noch nicht zeigen.

4. Hölder-Ungleichung für Folgenräume: Es sei $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für $x \in \ell^p$ und $y \in \ell^q$ das punktweise Produkt xy in ℓ^1 liegt und $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$ gilt.
   Hinweis: Verwenden und Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q},$$

   wobei $a, b \geq 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Beweisen Sie Lemma 2.8.