

PS Analysis 4 – Klausur 2 (27.06.2016)

Name:

Gruppe:

1. Wir betrachten die Halbgruppe

$$(T(t)a)_k = e^{ik^3t} a_k$$

mit $X = \ell^3(\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie den Generator $(\mathcal{D}(A), A)$ dieser Halbgruppe. Für welche $(M, \omega) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ gilt

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}?$$

2. Bestimmen Sie, wenn möglich, die schwache Ableitung folgender Funktionen

$$f_\alpha: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha.$$

für $\alpha \in (0, 1]$. Liegen diese Funktionen in H^1 ?

3. Wir betrachten $X = (H^1([0, 1]), (\cdot, \cdot))$ mit

$$(f, g) = \int_0^1 (1 + x^2) f(x) g(x) dx.$$

Ist X ein Prähilbertraum? Zeigen Sie, dass X kein Hilbertraum ist.

4. Seien X, Y, Z Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sei außerdem $S: \mathcal{D}(A) \subset Y \rightarrow Z$ ein abgeschlossener Operator. Zeigen Sie, dass ST ein abgeschlossener Operator ist.
5. Wir betrachten eine Folge von Operatoren $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit punktwisem Grenzwert $T: X \rightarrow Y$. Zeigen Sie, dass T wieder ein beschränkter Operator ist.